



第2章 解三角形

第1节 解三角形及其应用



题型上分练

1. B 【解析】 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$, 因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.

2. B 【解析】由题意, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - a^2}{2 \cdot 3a^2} = \frac{\left(\frac{7}{2}a\right)^2 - 6a^2 - a^2}{6a^2} = \frac{7}{8}$. 故选 B.

3. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 代入 $c = 4, \cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 可得 $b^2 - 2\sqrt{7}b + 16 - a^2 = 0$, 由 $\triangle ABC$ 有两解, 可得关于 b 的方程有两个不等正根,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 28 - 4(16 - a^2) > 0, \\ 16 - a^2 > 0, \end{cases} \text{解得 } 3 < a < 4. \text{ 故选 C.}$$

4. C 【解析】由题意得 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ (提示: 等边三角形面积公式),

$$\text{则 } S_1 - S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}bc,$$

$$\text{所以 } a^2 - b^2 - c^2 = bc, \text{ 故 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}.$$

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

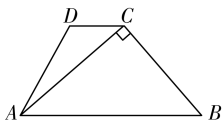
5. A 【解析】如图, 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, 即 $AC = \sqrt{7}$,

$$\text{则 } \cos \angle ACD = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{7 + 1 - 4}{2 \times \sqrt{7} \times 1} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle BAC = \angle ACD$ (突破口: 从 $\triangle ACD$ 转化到 $\triangle ABC$), 故 $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

$$\text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } \cos \angle BAC = \frac{AC}{AB}, \text{ 所以 } AB = \frac{AC}{\cos \angle BAC} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \frac{7}{2}.$$

故选 A.





6. A 【解析】因为 $2a - c = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$, 所以 $2a^2 - ac = a^2 + b^2 - c^2$, 整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, 又 $0 < B < \pi$, 故 $B = \frac{\pi}{3}$. 因为 $b = 4$, 所以 $16 = a^2 + c^2 - ac \geq ac$, 当且仅当 $a = c = 4$ 时取等号, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B \leq \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 故选 A.

7. 2 【解析】记 $AC = b, BC = a$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b \cdot BE = b$.

因为 $DC = DB, AD = 2, \angle CDA = \frac{\pi}{3}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CDA} = 2 \times$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \text{ 故 } b = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \text{ ①}$$

在 $\triangle CDA$ 中, 由余弦定理得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4 - b^2}{2 \times 2 \times \frac{1}{2}a} = \frac{1}{2}$, 即 $a =$

$$4 + \frac{a^2}{4} - b^2. \text{ ②}$$

将①代入②得 $a = 4 + \frac{a^2}{4} - \frac{3}{4}a^2$, 即 $a^2 + 2a - 8 = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -4$ (舍去), 即 $BC = 2$.

8. $4 + 2\sqrt{3}$ 【解析】在 $\triangle ACD$ 中, $AD = DC = 2$, 设 $\angle ACD = \theta$, 则

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), AC = 2CD \cos \theta = 4 \cos \theta.$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}, \angle ABC = \frac{\pi}{6}$, 则 $BC = \frac{AC}{\tan \angle ABC} = 4\sqrt{3} \cos \theta$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= (4\sqrt{3} \cos \theta)^2 + 4 + 16\sqrt{3} \cos \theta \sin \theta$$

$$= 4(12 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 1)$$

$$= 4(6 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 7)$$

$$= 16\sqrt{3} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 28,$$

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $2\theta + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 故当 $2\theta + \frac{\pi}{3} =$

$\frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 时, $(BD^2)_{\max} = 16\sqrt{3} + 28$, 所以 BD 长度的最大值

为 $4 + 2\sqrt{3}$.

9. 【解】(1) 由余弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$, 因为 $b^2 + c^2 - a^2 = 12$, 所以 $bc \cos A = 6$.

由三角形面积公式得 $\frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}$, 所以 $bc \sin A = 6\sqrt{3}$, 所



以 $\tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \sqrt{3}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)知, $bc \sin \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$, 得 $bc = 12$, 而 $b = 2\sqrt{3}$, 所以 $c = 2\sqrt{3}$,

又 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 故 $a = 2\sqrt{3}$, $a+c = 4\sqrt{3}$.

10. A 【解析】因为 $\cos A = -\frac{3}{5}$, 所以 $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin A =$

$$\sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sin C}$, 解得 $\sin C = \frac{2}{5}$.

11. C 【解析】由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{\sin 135^\circ} =$

$\sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{2} \sin B$, $c = \sqrt{2} \sin C$, 故 $\frac{b+c}{\sin B + \sin C} =$

$\frac{\sqrt{2} \sin B + \sqrt{2} \sin C}{\sin B + \sin C} = \sqrt{2}$ (另解: $\frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \sqrt{2}$). 故选

C.

12. D 【解析】由 $\tan B = 3 \tan A$ 得 $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3 \sin A}{\cos A}$, 即 $\sin B \cos A =$

$3 \sin A \cos B$. 根据正弦定理得 $\frac{4a \cos B - 3b \cos A}{5c} =$

$$\frac{4 \sin A \cos B - 3 \sin B \cos A}{5 \sin C} = \frac{4 \sin A \cos B - 3 \sin B \cos A}{5 \sin [\pi - (A+B)]} =$$

$$\frac{4 \sin A \cos B - 3 \sin B \cos A}{5 \sin (A+B)} = \frac{4 \sin A \cos B - 3 \sin B \cos A}{5 \sin A \cos B + 5 \sin B \cos A} =$$

$$\frac{4 \sin A \cos B - 9 \sin A \cos B}{5 \sin A \cos B + 15 \sin A \cos B} = -\frac{1}{4}.$$

故选 D.

13. D 【解析】因为 $A+B+C = \pi$, $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3} - B$, 所以

$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = 2 \sin B$, 即 $\sin \frac{2\pi}{3} \cos B - \cos \frac{2\pi}{3} \sin B = 2 \sin B$, 即

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B = 2 \sin B$, 整理得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \frac{3}{2} \sin B$, 即

$\sqrt{3} \cos B = 3 \sin B$, 所以 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 而 $B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $B =$

$\frac{\pi}{6}$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{6}}$, 即 $\frac{a}{b} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

故选 D.

14. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】由正弦定理得 $\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin A +$
 $\sin C$, ①

又 $\sin A = \sin [\pi - (B+C)] = \sin (B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,
C,



代入①式得 $\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C + \sin C$,

所以 $\sin B \sin C = \cos B \sin C + \sin C$.

又 $C \in (0, \pi)$, $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin B = \cos B + 1$,

又 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$,

所以 $(\cos B + 1)^2 + \cos^2 B = 2 \cos^2 B + 2 \cos B + 1 = 1$,

解得 $\cos B = 0$ 或 $\cos B = -1$. 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$.

15. $\frac{2}{5}$ 【解析】设 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a ,

b, c , $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r , 则由正弦定理得 $2r = \frac{c}{\sin C}$,

$r = \frac{c}{2 \sin C}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积之比

为 $\frac{\frac{1}{2}ab \sin C}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2}ab \sin C}{\frac{\pi c^2}{4 \sin^2 C}} = \frac{2ab \sin^3 C}{\pi c^2} = \frac{4}{5\pi}$, 所以 $\frac{ab \sin^3 C}{c^2} = \frac{2}{5}$.

由正弦定理得 $\frac{ab \sin^3 C}{c^2} = \frac{\sin A \sin B \sin^3 C}{\sin^2 C} = \sin A \sin B \sin(A+B)$
 $= \frac{2}{5}$.

16. 【解】(1) 由 $b = \sqrt{2}a \sin B$ 及正弦定理得 $\sin B = \sqrt{2} \sin A \sin B$.

$\because B \in (0, \pi)$, $\therefore \sin B \neq 0$, 故 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{\pi}{4}$ 或 $A = \frac{3\pi}{4}$.

(2) 由 $\tan C = -\tan(A+B) = \tan A + \tan B$, 得 $-\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \tan A + \tan B$,

又 $\tan A + \tan B \neq 0$, $\therefore \tan A \tan B = 2$.

结合(1)可得 $A = \frac{\pi}{4}$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan A = 1$, 故 $\tan B = 2$,

$\therefore \tan C = \tan A + \tan B = 3$, 则 $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 则 $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \sqrt{5}$, 故 $\triangle ABC$ 的面

积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 3 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3$.

17. A 【解析】因为 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$, 由正弦定理得 $\sin A \sin B =$

$\sqrt{3} \sin B \cos A$, 又因为 $B \in (0, \pi)$, 可得 $\sin B > 0$, 所以 $\sin A =$

$\sqrt{3} \cos A$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $a \cos C + c \cos A = a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b =$



$\sqrt{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$.

故选 A.

快解

根据射影定理可得 $a\cos C + c\cos A = b = \sqrt{3}$, 代入 $a\sin B = \sqrt{3}b\cos A$, 得 $a\sin B = 3\cos A$. 由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $a\sin B = b\sin A = \sqrt{3}\sin A = 3\cos A$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$. 故选 A.

18. B 【解析】因为 $a = a\cos B + b\cos A$, 所以由正弦定理可得 $\sin A = \sin A\cos B + \sin B\cos A$, 即 $\sin A = \sin(A+B) = \sin C$.

又 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $A, C \in (0, \pi)$ 且 $A+C \in (0, \pi)$, 所以 $A=C=\frac{\pi}{4}$, 所以

$B=\frac{\pi}{2}$. 又 $a=1$, 所以 $c=1, b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

快解

由射影定理得 $a = a\cos B + b\cos A = c$, 所以 $\sin A = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $A, C \in (0, \pi)$ 且 $A+C \in (0, \pi)$, 所以 $A=C=\frac{\pi}{4}$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $b=\sqrt{2}$. 故选 B.

19. C 【解析】由题意得 $b\cos C + c\cos B = r$, 又由正弦定理得

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$, 所以 $b = 2r\sin B, c = 2r\sin C$.

所以 $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B+C) = \frac{1}{2}$. 又 $B+C = \pi - A$,

所以 $\sin A = \frac{1}{2}$. 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ 或 $A = \frac{5\pi}{6}$ (易错:

忽略角 A 的范围). 故选 C.

快解

由题结合射影定理得 $b\cos C + c\cos B = r = a$, 又根据正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = 2r$, 即 $\frac{a}{\sin A} = 2a$, 所以 $\sin A = \frac{1}{2}$. 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ 或 $A = \frac{5\pi}{6}$. 故选 C.

20. A 【解析】由 $c^2 = a^2 + b^2 + ab$, 得 $\cos \angle ACB = -\frac{1}{2}$ (提示: 余

弦定理). $\therefore \angle ACB \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{2\pi}{3}$.

由角平分线长公式得 $CD = \frac{2ab\cos \frac{\angle ACB}{2}}{a+b}$ (提示: 角平分线长公式, 作为二级结论记忆),



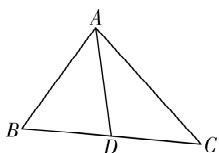
$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{2ab \cdot \frac{1}{2}}{a+b}, \text{ 整理得 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2.$$

$\because a > 0, b > 0, \therefore 4a + 9b = \frac{1}{2}(4a + 9b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} \left(13 + \frac{9b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \left(13 + 2\sqrt{\frac{9b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}\right) = \frac{25}{2}$ (提示:基本不等式“1”的巧用), 当且仅当 $\frac{9b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $b = \frac{2}{3}a$ 时取等号. 又 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$, 即当且仅当 $a = \frac{5}{4}, b = \frac{5}{6}$ 时, $4a + 9b$ 取最小值 $\frac{25}{2}$. 故选 A.

21. $\frac{\sqrt{46}}{2}$ 【解析】如图, 由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36 + 16 - 25}{2 \times 6 \times 4} = \frac{9}{16}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 有 $AB = c = 4, BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = 3$,

由余弦定理可得 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{9}{16} = \frac{23}{2}$, 解得 $AD = \frac{\sqrt{46}}{2}$.



快解 在 $\triangle ABC$ 中, 根据中线长公式可得 $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2 \times (25 + 16) - 36} = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

22. 【解】(1) 由题知 $2b \cos C = 2a - c$, 根据正弦定理可得 $2 \sin B \cos C = 2 \sin A - \sin C$, ①

因为 $A = \pi - B - C$, 所以 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

代入①式得 $2 \sin B \cos C = 2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C - \sin C$,

整理得 $2 \cos B \sin C - \sin C = (2 \cos B - 1) \sin C = 0$, 又 $\sin C \neq 0$,

故 $2 \cos B - 1 = 0$, 即 $\cos B = \frac{1}{2}$, 又 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由三角形面积公式知 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = 2\sqrt{3}$, 可得

$ac = 8$, ②

又 $b = 2\sqrt{3}$, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $12 = a^2 + c^2 - ac$, ③

②③式联立可得 $\begin{cases} a=2, \\ c=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4, \\ c=2 \end{cases}$,

因为 BD 平分 $\angle ABC$, 所以由角平分线的性质得 $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$,

又 $AD + DC = AC = b = 2\sqrt{3}$, 所以 $AD = \frac{c}{a+c}b = \frac{\sqrt{3}}{3}c$, 故 AD 的长度



为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

23. 【解】(1) 因为 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $AD^2 =$

$$\vec{AD}^2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + bc) \geq \frac{3}{4}bc, \text{ 则 } bc \leq \frac{4}{3}, \text{ 当且仅当 } b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

时取等号,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的}$$

最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 方法一(利用余弦定理转化): 因为 $\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{DC}$, 所以

$$BD = \frac{a}{3}, DC = \frac{2a}{3}.$$

记 $\angle ADB = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, 则有 $\cos \alpha + \cos \beta = 0$, 由余弦定理得

$$\frac{1 + \frac{a^2}{9} - c^2}{2 \times 1 \times \frac{a}{3}} + \frac{1 + \frac{4a^2}{9} - 4c^2}{2 \times 1 \times \frac{2a}{3}} = 0, \text{ 整理得 } 9 + 2a^2 - 18c^2 = 0. \text{ ①}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \angle BAD = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } \frac{a^2}{9} = 1 + c^2 - 2 \times c \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{a^2}{9} = 1 + c^2 - \sqrt{3}c. \text{ ②}$$

$$\text{联立 ①②, 解得 } c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

方法二(利用角平分线性质的逆定理): 因为 $AC = 2AB$,

$$\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{DC}, \text{ 所以 } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}, \text{ 所以 } AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$

$$\text{因为 } \angle BAD = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } \angle CAD = \frac{\pi}{6}, \angle BAC = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \times 1 \times c \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times 1 \times$$

$$2c \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times c \times 2 \sin \frac{\pi}{3}, \text{ 解得 } c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

24. 【解】(1) 由题知 $\sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 A = \sin B \sin C$, 由正弦定理可得 $c^2 + b^2 - a^2 = bc$,

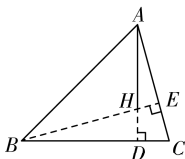
$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0^\circ < A < 180^\circ, \text{ 所以 } A = 60^\circ.$$

(2) 过点 H 作 $HD \perp BC$, 交 BC 于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AC$, 交 AC 于点 E , 故 $\angle AHB = \angle DHE = 180^\circ - \angle C$. $\sin \angle ABH = \sin(90^\circ - \angle BAE) = \cos \angle BAE$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R , 由

$$\text{正弦定理得 } \frac{AH}{\sin \angle ABH} = \frac{AB}{\sin \angle AHB} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \angle C)} =$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R = \frac{AH}{\cos \angle BAE}, \text{ 故 } AH = 2R \cos \angle BAE,$$

$$\text{所以 } \frac{a}{AH} = \frac{a}{2R \cos \angle BAE} = \frac{\sin \angle BAE}{\cos \angle BAE} = \tan \angle BAE = \sqrt{3}.$$



25. D 【解析】因为 $AB=1, AC=3$, 所以由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

得 $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin C = \frac{1}{3} \sin B$. 因为 $\cos B + \sin C = 1$,

所以 $\sin C = 1 - \cos B$, 所以 $\frac{1}{3} \sin B = 1 - \cos B$, 即 $\sin B = 3 -$

$3 \cos B$. 又 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, 所以 $(3 - 3 \cos B)^2 + \cos^2 B = 1$, 整

理得 $5 \cos^2 B - 9 \cos B + 4 = 0$, 即 $(5 \cos B - 4)(\cos B - 1) = 0$, 因

为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $-1 < \cos B < 1$, 所以 $\cos B - 1 \neq 0$, 所以

$5 \cos B - 4 = 0$, 所以 $\cos B = \frac{4}{5}$. 由余弦定理 $AC^2 = BC^2 + AB^2 -$

$2BC \cdot AB \cos B$, 得 $BC^2 - \frac{8}{5} BC - 8 = 0$, 解得 $BC =$

$\frac{\frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25} - 4 \times 1 \times (-8)}}{2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{6}}{5}$, 因为 $BC > 0$, 所以 $BC =$

$\frac{4 + 6\sqrt{6}}{5}$. 故选 D.

26. B 【解析】在 $\triangle AFC$ 中, $\angle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 又

$\cos \angle ACF = \frac{13}{14}$, 则 $\sin \angle ACF = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

设 $AF = CE = t (t > 0)$, 则 $CF = 2 + t$.

在 $\triangle AFC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AF}{\sin \angle ACF} = \frac{AC}{\sin \angle AFC}$,

解得 $AC = \frac{7}{3}t$,

由余弦定理得 $AC^2 = AF^2 + CF^2 - 2AF \cdot CF \cdot \cos \angle AFC$,

即 $\frac{49}{9}t^2 = t^2 + (2+t)^2 - 2t \cdot (2+t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$,

又 $t > 0$, 解得 $t = 3$, 则 $AC = 7$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$. 故选 B.

27. ACD 【解析】对于 A, 由 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2$ 得 $|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot$

$\cos \angle ABC = 2$, 解得 $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$, 所

以 $\angle ABC = 45^\circ$, 故 A 正确.

对于 B, 连接 AC (图略), 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 =$

$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 4 + 2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, 所以

$AC = \sqrt{2}$, 故 B 错误.

对于 C, 易知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 所以

$\angle ACD = 30^\circ$. 又 $\angle ADC = 135^\circ$, 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得

$\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, 所以 $AD = 1$. 连接 BD (图略), 在



$\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot$

$$AB \cos \angle DAB = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3, \text{ 所以 } BD = \sqrt{3}, \text{ 故 C 正}$$

确.

对于 D, $\angle CAD = \angle DAB - \angle CAB = 15^\circ$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot$

$$\sin \angle CAD = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \text{ 故}$$

D 正确. 故选 ACD.

28. D 【解析】因为 $b \sin A + \sqrt{2} a \cos B = 0$, 所以由正弦定理得 $\sin B \cdot$

$\sin A + \sqrt{2} \sin A \cos B = 0$. 又 $\sin A > 0$, 所以 $\sin B + \sqrt{2} \cos B = 0$,

所以 $\sin B = -\sqrt{2} \cos B$. 又因为 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, 所以

$$\begin{cases} \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ \cos B = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin B = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad (\text{舍去}).$$

由余弦定理可知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} ac$, 又 $b^2 =$

$$\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) ac, \text{ 所以 } a^2 + c^2 = 2ac, \text{ 故 } a = c. \text{ 故选 D.}$$

29. $\frac{5\pi}{6}$ 【解析】由题知 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \sqrt{3} c \sin B = a$, 由余弦定理得

$$b \cos C - \sqrt{3} c \sin B = a,$$

由正弦定理得 $\sin B \cos C - \sqrt{3} \sin C \sin B = \sin A$.

因为 $A = \pi - (B + C)$, 所以 $\sin B \cos C - \sqrt{3} \sin C \sin B = \sin (B +$

$C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 即 $-\sqrt{3} \sin C \sin B = \cos B \sin C$.

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sqrt{3} \sin B + \cos B = 0$, 即 $2 \sin \left(B + \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{5\pi}{6}$.

30. $\frac{15\sqrt{15}}{8}$ 【解析】因为 $AB > AC$, 所以 $\angle ACB > \angle B$.

过点 C 作射线 CD 交线段 AB 于点 D, 使 $\angle BCD = \angle B$ (图

略), 则 $CD = BD$, 所以 $\cos (C - B) = \cos \angle ACD = \frac{7}{8}$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ACD = \frac{16 + CD^2 - (5 - CD)^2}{8CD} =$

$$\frac{7}{8}, \text{ 解得 } CD = 3.$$

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle CAD = \frac{16 + 4 - 9}{2 \times 4 \times 2} = \frac{11}{16}$,

$$\text{则 } \sin \angle CAD = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{16},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{15\sqrt{15}}{8}.$$

31. 【解】(1) 因为 $\cos B = \frac{2a+b}{2c}$, 所以由正弦定理可得 $\cos B =$



$\frac{2\sin A + \sin B}{2\sin C}$, 即 $2\sin C \cos B = 2\sin(B+C) + \sin B$, 所以 $2\sin B \cos C + \sin B = 0$. 又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$. 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由题可知, $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 则 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

设 $AD = t (t > 0)$, 则 $AB = 3t$, 有 $\frac{t}{3} = \frac{3}{3t}$, 故 $t = \sqrt{3}$, 所以 $AB = 3\sqrt{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$, 解得 $BC = 3$ (负值舍去),

所以 $A = B = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\triangle ADC$ 为等腰三角形, 所以 $CD = AD = \sqrt{3}$.

32. 【解】 (1) 因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $2b = a + c$.

由题知 $2\sin A = \sin C$, 由正弦定理可得 $2a = c$, 将其代入 $2b = a + c$, 可得 $b = \frac{3a}{2}$. 由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$\frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (2a)^2 - a^2}{2 \times \frac{3a}{2} \times 2a} = \frac{\frac{21a^2}{4}}{6a^2} = \frac{7}{8}.$$

(2) 因为 $\cos A = \frac{7}{8}$, 且 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 则 $R = \frac{4\sqrt{15}}{15}$. 由正弦定理得

$$a = 2R \sin A = 2 \times \frac{4\sqrt{15}}{15} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 1, \text{ 则 } c = 2a = 2, b = \frac{3a}{2} = \frac{3}{2}. \text{ 所}$$

$$\text{以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

33. 【解】 (1) 因为 D 为 AC 的中点, 所以 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BDC}$ (提示: 等

面积法), 则 $\frac{1}{2}BA \cdot BC \sin \angle ABC = BD \cdot BC \sin \angle DBC$, 即

$$BA \sin \angle ABC = 2BD \sin \angle DBC,$$

因为 $\angle ABC + \angle DBC = \pi$, 所以 $\sin \angle DBC = \sin(\pi - \angle ABC) =$

$$\sin \angle ABC, \text{ 所以 } BA = 2BD, \text{ 即 } \frac{BA}{BD} = 2.$$

(2) 不妨令 $AC = 3BC = 6$, 则 $BC = 2, CD = 3$,

设 $BD = x$, 则 $AB = 2x$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $x^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD$,

$$\text{即 } x^2 = 13 - 12 \cos \angle BCD. \quad ①$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $4x^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos \angle BCA$, 即 $4x^2 = 40 - 24 \cos \angle BCD. \quad ②$

$$\text{联立 } ①②, \text{ 解得 } x = BD = \sqrt{7}, \cos \angle BCD = \frac{1}{2},$$



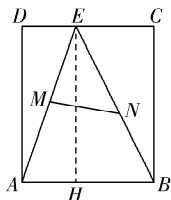
又 $\angle BCD \in (0, \pi)$, 所以 $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$.

34. 【解】(1) 如图, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 设 $BC = m$, 易知

$$AH = 2, BH = 3, \text{ 则 } \tan \angle AEH = \frac{2}{m}, \tan \angle BEH = \frac{3}{m}. \text{ 由}$$

$$\tan \angle AEB = \tan(\angle AEH + \angle BEH) = \frac{\frac{2}{m} + \frac{3}{m}}{1 - \frac{6}{m^2}} = \tan \frac{\pi}{4} = 1, \text{ 整理}$$

得 $m^2 - 5m - 6 = 0$, 解得 $m = 6$ 或 $m = -1$ (舍去), 所以 $BC = 6$.



(2) 由 (1) 易知 $EA = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$, $EB = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$, 设 $EM = a$, $EN = b$,

$$\text{由 } \frac{S_{\triangle EMN}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{\frac{1}{2}EM \cdot EN \sin \angle MEN}{\frac{1}{2}EA \cdot EB \sin \angle AEB} = \frac{EM \cdot EN}{EA \cdot EB} = \frac{ab}{2\sqrt{10} \times 3\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{4}, \text{ 解得 } ab = \frac{15(2+\sqrt{2})}{2}.$$

在 $\triangle EMN$ 中, 由余弦定理得 $MN^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{4} \geq (2 -$

$$\sqrt{2})ab = (2 - \sqrt{2}) \times \frac{15(2+\sqrt{2})}{2} = 15, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时取等号,}$$

所以 MN 的最小值为 $\sqrt{15}$.

35. D 【解析】如图, 要使所用时间最少, 小船实际航行的方向

应与 $\overrightarrow{DC}$ 的方向保持一致 (提示: 水流速度 + 船在静水中的速度 = 实际速度), 设小船的速度为 $\overrightarrow{DN}$, 水流速度为 $\overrightarrow{DM}$,

小船实际航行速度为 $\overrightarrow{DP}$, DE 为河宽, 在 $\text{Rt} \triangle DEC$ 中, $EC =$

$$BC - AD = 500 \text{ m}, DE = 1200 \text{ m}, \text{ 则 } DC = \sqrt{500^2 + 1200^2} =$$

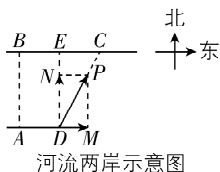
$$1300 (\text{m}), \sin \angle EDC = \frac{5}{13}, \text{ 则 } \cos \angle CDM = \frac{5}{13}. \text{ 易知四边形}$$

$DMPN$ 为平行四边形, 设小船在静水中航行的速度大小为

$x \text{ km/h}$, 在 $\triangle DPM$ 中, 由余弦定理得 $x^2 = 5^2 + 13^2 - 2 \times 5 \times 13 \times$

$$\frac{5}{13} = 25 + 169 - 50 = 144, \text{ 解得 } x = 12 \text{ km/h}, \text{ 即小船在静水中航}$$

行的速度大小为 12 km/h . 故选 D.



河流两岸示意图

36. A 【解析】由题意可知 $\angle AQB = 45^\circ$, $\angle CQD = 60^\circ$ 且 $AB =$

50 m , 在 A 处测得泰姬陵顶端 C 处的仰角为 15° , 所以

$\angle CAQ = 60^\circ$, $\angle ACQ = 45^\circ$, $AQ = 50\sqrt{2} \text{ m}$. 在 $\triangle ACQ$ 中, 由正



弦定理可得 $\frac{CQ}{\sin 60^\circ} = \frac{AQ}{\sin 45^\circ}$, 即 $\frac{CQ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 解得 $CQ =$

$50\sqrt{3}$ m, 故 $CD = CQ \sin 60^\circ = 75$ m. 故选 A.

37. B 【解析】设 $D_1E = h$ (米), 因为 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\tan \beta = 2$, $\tan \gamma =$

$\sqrt{3}$, 所以 $A_1D_1 = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{6}h}{3}$, $B_1D_1 = \frac{h}{\tan \beta} = \frac{h}{2}$, $C_1D_1 = \frac{h}{\tan \gamma} =$

$\frac{\sqrt{3}h}{3}$. 因为 $AC = 20$, 点 B 为 AC 的中点, 所以 $A_1C_1 = 20$, 点 B_1

为 A_1C_1 的中点, 故 $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$.

在 $\triangle A_1B_1D_1$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle A_1B_1D_1 = \frac{100 + \frac{h^2}{4} - \frac{2h^2}{3}}{2 \times 10 \times \frac{h}{2}} =$

$$\frac{100 - \frac{5h^2}{12}}{10h}.$$

在 $\triangle C_1B_1D_1$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle C_1B_1D_1 = \frac{100 + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{3}}{2 \times 10 \times \frac{h}{2}} =$

$$\frac{100 - \frac{h^2}{12}}{10h},$$

由于 $\angle A_1B_1D_1 + \angle C_1B_1D_1 = \pi$, 故 $\cos \angle A_1B_1D_1 + \cos \angle C_1B_1D_1 = 0$,

即 $\frac{100 - \frac{5h^2}{12}}{10h} + \frac{100 - \frac{h^2}{12}}{10h} = 0$, 解得 $h = 20$ (负值舍去),

故建筑物的高度 $DE = h + 2 = 22$ (米). 故选 B.

38. $\sqrt{6}-1$ 【解析】由题意可知 $AC = 2$ km, $AB = 3$ km, $\angle ACB = 120^\circ$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB$, $\therefore 9 = 4 + BC^2 - 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times BC$, 解得 $BC = (-1 - \sqrt{6})$ km (舍去) 或 $BC = (\sqrt{6} - 1)$ km.

39. $2\sqrt{5}$ 【解析】如图, 连接 AM, MN, AN, BM, BN . 因为在 A 点测得 M, N 的俯角分别为 $75^\circ, 30^\circ$, 所以 $\angle MAB = 75^\circ$, $\angle NAB = 30^\circ$.

因为在 B 点测得 M, N 的俯角分别为 $45^\circ, 60^\circ$, 所以 $\angle MBA = 45^\circ$, $\angle NBA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

在 $\triangle ABM$ 中, 已知 $\angle MAB = 75^\circ$, $\angle MBA = 45^\circ$, 则 $\angle AMB = 60^\circ$.

由正弦定理得 $\frac{AM}{\sin \angle MBA} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$,

所以 $AM = \frac{AB \cdot \sin \angle MBA}{\sin \angle AMB} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$ km.

因为 $\angle NAB = 30^\circ$, $\angle ABN = 120^\circ$, 则 $\angle ANB = 30^\circ$, 所以 $AB =$

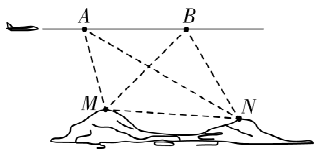


$$BN = 2\sqrt{3} \text{ km.}$$

在 $\triangle ABN$ 中, 由余弦定理得 $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cos 120^\circ = 36$, 所以 $AN = 6 \text{ km}$.

因为 $\angle MAB = 75^\circ$, $\angle NAB = 30^\circ$, 所以 $\angle MAN = 45^\circ$.

在 $\triangle AMN$ 中, 由余弦定理得 $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 45^\circ$, 故 $MN^2 = 8 + 36 - 24 = 20$, 所以 $MN = 2\sqrt{5} \text{ km}$.



综合提分练

1. B 必刷知识 ⊙ 正弦定理、余弦定理

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $c \sin A = \sqrt{3} a \cos C$ 及正弦定理得 $\sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C$,

而 $\sin A > 0$, 则 $\tan C = \sqrt{3}$, 又 $0 < C < \pi$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $24 = c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 3ab = (a+b)^2 - 12$, 所以 $a+b = 6$. 故选 B.

2. D 必刷知识 ⊙ 三角恒等变换、正弦定理

【解析】因为 $\frac{\cos C}{c} = \frac{\cos A}{3b-a}$, 所以由正弦定理可得 $\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\cos A}{3 \sin B - \sin A}$, 所以 $3 \sin B \cos C - \sin A \cos C = \cos A \sin C$, 即 $3 \sin B \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B$, 又 $0 < B < \pi$, 所以 $\sin B > 0$, 故 $3 \cos C = 1$, 解得 $\cos C = \frac{1}{3}$.

又因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C > 0$, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$. 故选 D.

3. D 必刷考点 ⊙ 解三角形的实际应用

【解析】在 $\triangle ACD$ 中, $\angle D = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, 由正弦定理得 $AC =$

$$\frac{AD \sin \angle D}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ n mile.}$$

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4 \text{ n mile}$, $\angle BAC = 60^\circ$, 由余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 4^2 + 12^2 - 2 \times 4 \times 12 \times \frac{1}{2} = 112$, 所以 $BC = 4\sqrt{7} \text{ n mile}$.

4. A 必刷考点 ⊙ 射影定理、三角形面积公式、基本不等式的应用

【解析】因为 $a \cos B = (2c - b) \cos A$,

即 $a \cos B + b \cos A = 2c \cos A$, 由射影定理可得 $c = 2c \cos A$,

关键点



故 $\cos A = \frac{1}{2}$. 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理, 结合 $a=3$, 可得 $\cos A = \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-9}{2bc}$, 即 $b^2+c^2=bc+9 \geq 2bc$, 解得 $bc \leq 9$, 当且仅当 $b=c=3$ 时取等号.

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} bc \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 9 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 当且仅当 $b=c=3$ 时取等号.

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

5. B 必刷知识 ⊙ 正弦定理、射影定理、向量的数量积

【解析】由题意可知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} c^2$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2} b^2$.

$$\therefore \frac{\cos B}{c} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{\cos C}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2R} \cdot m \overrightarrow{AO}^2,$$

突破点

$$\therefore \frac{\cos B}{c} \cdot \frac{1}{2} c^2 + \frac{\cos C}{b} \cdot \frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{2R} \cdot m R^2,$$

$$\therefore c \cos B + b \cos C = m R.$$

由射影定理得 $a = c \cos B + b \cos C$, $\therefore a = m R$.

又由正弦定理得 $a = 2R \sin A$, $\therefore m = 2 \sin A$,

$$\therefore m = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \text{ 故选 B.}$$

6. AD 必刷题型 ⊙ 正、余弦定理的综合应用, 三角形面积

【解析】对于 A 选项, 已知 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin B$, 由正弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$

$$\frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } C \in (0, \pi), \text{ 故 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 故 A 正确.}$$

对于 B 选项, 将 $a=2b$ 代入 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ 中得 $c = \sqrt{3}b$, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 3b^2 - 4b^2}{2b \cdot \sqrt{3}b} = 0$, 又 $A \in (0, \pi)$, 故

$$A = \frac{\pi}{2}, \sin A = 1, \text{ 故 B 错误.}$$

对于 C 选项, 若 $a+b=4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab \leq$

$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \sqrt{3}$, 当且仅当 $a=b=2$ 时取等号, 故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 故 C 错误.

对于 D 选项, 由 $C = \frac{\pi}{3}$ 得 $B = \frac{2\pi}{3} - A$, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{b}{a} =$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan A} + \frac{1}{2},$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 所以 $A \in$



$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\tan A \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2\tan A} \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$, 故 $\frac{b}{a} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 故 **D** 正确.

故选 AD.

7. A 必刷考点 ⊙ 正弦定理、三角恒等变换的综合应用

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \text{由题意得 } \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B-A}{2} = \cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{A-B}{2} \\ &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ &= \left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right). \end{aligned}$$

因为 $a=2b$, 所以由正弦定理得 $\sin A=2\sin B$, 因为 $\sin B=\frac{1}{3}$,

所以 $\sin A=\frac{2}{3}$, 且 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $\frac{B}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} > 0$, 所以

$$\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\left(\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \sin B} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ 又 } \frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} > 0,$$

$$\text{故 } \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \sin A} =$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}}, \text{ 故 } \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B-A}{2} = \frac{\sqrt{10}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

8. B 必刷题型 ⊙ 解三角形中的新定义问题

【解析】设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

因为 $\sin A : \sin B : \sin C = 2\sqrt{2} : 2 : 1$, 所以由正弦定理得

$$a : b : c = 2\sqrt{2} : 2 : 1.$$

又 $a=4$, 所以 $b=2\sqrt{2}, c=\sqrt{2}$.

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8+2-16}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}, \text{ 所以}$$

$A > 120^\circ$, 所以顶点 A 为费马点, 故点 A 到各顶点的距离之和为 $b+c=3\sqrt{2}$. 故选 B.

9. B 必刷考点 ⊙ 正、余弦定理的综合应用

【解析】由 $b \sin \angle A + \sqrt{3} a \cos \angle ABC = 0$ 及正弦定理可得

$$\sin \angle ABC \cdot \sin \angle A + \sqrt{3} \sin \angle A \cdot \cos \angle ABC = 0, \text{ 由 } \angle A \in (0, \pi), \text{ 可得}$$

$$\sin \angle A > 0, \text{ 则 } \sin \angle ABC + \sqrt{3} \cos \angle ABC = 0, \text{ 即 } 2 \sin \left(\angle ABC + \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{3} \right) = 0, \text{ 又 } \angle ABC \in (0, \pi), \text{ 故 } \angle ABC = \frac{2\pi}{3}.$$

设 $CD=m, BD=n$, 由 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{DC}$, 可得 $AD=2m$,

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC = a^2 + c^2 + ac$, 又 $2a+c=12$, 所以 $9m^2 = a^2 + (12-2a)^2 + a(12-2a)$, 整理得 $3m^2 = a^2 - 12a + 48$.

$$\text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle CDB \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle ADB = \frac{4m^2 + n^2 - c^2}{4mn},$$



$$\cos \angle CDB = \frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn},$$

$$\text{由 } \angle ADB + \angle CDB = \pi \text{ 可得 } \frac{4m^2 + n^2 - c^2}{4mn} = -\frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn},$$

故 $3n^2 = -6m^2 + 2a^2 + c^2 = -2(a^2 - 12a + 48) + 2a^2 + (12 - 2a)^2 = 4(a - 3)^2 + 12$, 当 $a = 3$ 时, $3n^2$ 取得最小值 12, 即 n^2 的最小值为 4, 故 BD 的最小值为 2. 故选 B.

快解

由 $b \sin \angle A + \sqrt{3} a \cos \angle ABC = 0$ 及正弦定理可得 $\sin \angle ABC \cdot \sin \angle A + \sqrt{3} \sin \angle A \cdot \cos \angle ABC = 0$, 由 $\angle A \in (0, \pi)$, 可得 $\sin \angle A > 0$, 则 $\sin \angle ABC + \sqrt{3} \cos \angle ABC = 0$, 即 $2 \sin \left(\angle ABC + \frac{\pi}{3} \right) = 0$, 又 $\angle ABC \in (0, \pi)$, 故 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$.

由题意知 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$, 两边同时平方得 $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{9} \overrightarrow{BA}^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{9} \overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{9} c^2 - \frac{2}{9} ac + \frac{4}{9} a^2 \geq 2 \sqrt{\frac{1}{9} c^2 \times \frac{4}{9} a^2} - \frac{2}{9} ac = \frac{2}{9} ac$, 又 $2a + c = 12$, 所以当且仅当 $c^2 = 4a^2$, 即 $a = 3, c = 6$ 时取等号, 则 $\overrightarrow{BD}^2 \geq \frac{2}{9} ac = \frac{2}{9} \times 3 \times 6 = 4$, 故 BD 的最小值为 2. 故选 B.

10. $\frac{1}{3\pi}$ 必刷题型 $\odot$ 正弦定理在三角形外接圆问题中的应用

【解析】 因为 $2 \sin A \cos(B - C) + \sin 2A$

$$= 2 \sin A \cos(B - C) + 2 \sin A \cos A$$

$$= 2 \sin A \cos(B - C) - 2 \sin A \cos(B + C)$$

$$= 2 \sin A [\cos(B - C) - \cos(B + C)]$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{6}.$$

$$\text{设 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径为 } R, \text{ 则 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{2R} \cdot$$

$$\frac{b}{2R} \cdot \sin C = \frac{2}{\pi} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{3\pi}.$$

11. $\frac{1}{16}$ 必刷考点 $\odot$ 三角形的面积公式, 利用正、余弦定理解三角形

【解析】 已知 $a \sin A + \sin B = \sin C$, 由正弦定理可得 $a^2 + b = c$,

$$\text{由 } \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{4}{3}, \sin^2 C + \cos^2 C = 1, C \in (0, \pi), \text{ 可得}$$

$$\sin C = \frac{4}{5}, \cos C = \frac{3}{5}.$$

$$\text{由余弦定理可得 } c^2 = (a^2 + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\text{所以 } b = \frac{5a - 5a^3}{10a + 6}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{2}{5}ab, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r \text{ (记忆: 用内切}$$

圆半径求三角形面积的公式), 所以 $\frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{2}{5}ab$,

$$\text{故 } r = \frac{4ab}{5(a+b+c)} = \frac{4ab}{5(a+a^2+2b)} = \frac{4a \cdot \frac{5a-5a^3}{10a+6}}{5\left(a+a^2+2 \cdot \frac{5a-5a^3}{10a+6}\right)} =$$

$$\frac{a-a^3}{4(a+1)} = \frac{a(1-a)}{4} = \frac{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{4} \leq \frac{1}{16}, \text{ 当且仅当 } a = \frac{1}{2}$$

时等号成立, 所以 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

12. $\frac{4}{3}$ 必刷考点 ⊙ 三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【解析】在解三角形问题中, 给出多个角相等, 一般考虑利用面积公式, 考虑等面积法求解.

设 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \angle PBA = \theta$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$,

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2}c \cdot AP \sin \theta + \frac{1}{2}a \cdot$$

$$BP \sin \theta + \frac{1}{2}b \cdot CP \sin \theta, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin \theta (c \cdot AP + a \cdot BP +$$

$$b \cdot CP), \text{ 即 } c \cdot AP + a \cdot BP + b \cdot CP = \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin \theta}.$$

在 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PAC$ 中, 分别由余弦定理可得

$$BP^2 = c^2 + AP^2 - 2c \cdot AP \cos \theta,$$

$$CP^2 = a^2 + BP^2 - 2a \cdot BP \cos \theta,$$

$$AP^2 = b^2 + CP^2 - 2b \cdot CP \cos \theta,$$

三式相加整理得 $a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cos \theta (c \cdot AP + a \cdot BP + b \cdot CP)$,

$$\text{所以 } a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cos \theta \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin \theta}.$$

因为 $\angle PBC = \angle PBA$, 所以 $\angle ABC = 2\theta$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin 2\theta$, 则

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cos \theta \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin \theta} = 2 \cos \theta \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2}ac \sin 2\theta}{\sin \theta} = 4a \cos^2 \theta.$$

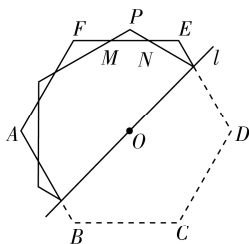
由余弦定理可得 $a^2 + c^2 = b^2 + 2a \cos 2\theta = b^2 + 2ac(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, 所以 $b^2 = -b^2 + 2ac(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -b^2 + 2ac$, 所以 $b^2 =$

$$ac. \text{ 又 } a=3, b=2, \text{ 所以 } c=AB=\frac{4}{3}.$$

13. $6\sqrt{3}-9$ 必刷知识 ⊙ 余弦定理、基本不等式、三角形面积公式

【解析】如图, 由对称性可知, 折叠后的图形与另外一半不完全重合时的面积比完全重合时的面积大, 此时, 折叠后的面积

为正六边形面积的 $\frac{1}{2}$ 与 $\triangle PMN$ 面积的 3 倍的和.



由正六边形的性质和对称性知, $PM+PN+MN=1$ (提示: 将三角形的周长转化为线段 EF 的长), $\angle MPN=120^\circ$.

在 $\triangle PMN$ 中, 由余弦定理得 $MN^2 = (1-PM-PN)^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cos 120^\circ$, 整理得 $2(PM+PN) - PM \cdot PN - 1 = 0$.

由基本不等式可知 $PM+PN \geq 2\sqrt{PM \cdot PN}$, 则 $0 \geq 4\sqrt{PM \cdot PN} - PM \cdot PN - 1$, 即 $PM \cdot PN - 4\sqrt{PM \cdot PN} + 1 \geq 0$.

因为 $0 < PM < 1, 0 < PN < 1$, 所以 $PM \cdot PN \leq (2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$, 当且仅当 $PM=PN=2-\sqrt{3}$ 时等号成立,

故 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}PM \cdot PN \sin 120^\circ \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times (7-4\sqrt{3})$.

又正六边形的面积 $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以折叠后所成图形的

面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (7-4\sqrt{3}) \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} - 9$.

14. 必刷考点 ⊙ 三角恒等变换, 三角形面积公式, 利用正、余弦定理解三角形

【解】 (1) 由正弦定理得 $\sqrt{3} \sin \angle BAC \sin B + \sin B \cos \angle BAC = \sin B$, $\because B \in (0, \pi)$, $\therefore \sin B \neq 0$,

$$\therefore \sqrt{3} \sin \angle BAC + \cos \angle BAC = 1,$$

$$\therefore \sin\left(\angle BAC + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \angle BAC \in (0, \pi), \therefore \angle BAC = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \because AD \text{ 平分 } \angle BAC, \therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{3}.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}, \therefore \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \frac{1}{2}AD \cdot c \sin \angle BAD + \frac{1}{2}AD \cdot b \sin \angle CAD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}bc \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{8}c \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{8}b \cdot \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \frac{\sqrt{3}}{4}(b+c) \times \frac{15}{8}, \text{ 即 } bc = \frac{15}{8}(b+c). \quad ①$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } 7^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } 49 = (b+c)^2 - bc. \quad ②$$

$$\text{将 } ① \text{ 代入 } ② \text{ 得 } 8(b+c)^2 - 15(b+c) - 8 \times 49 = 0, \text{ 解得 } b+c = 8 \text{ 或 } b+c = -\frac{49}{8} \text{ (舍去),}$$



所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=7+8=15$.

15. 必刷考点 ⊙ 正、余弦定理的综合应用

【解】(1) 方法一(边化角): 由 $\frac{b\cos C - 2a\cos A}{\cos B} = -c$, 整理得

$$b\cos C + c\cos B = 2a\cos A,$$

由正弦定理得 $\sin B\cos C + \sin C\cos B = 2\sin A\cos A$, 即 $\sin(B+C) = \sin A = 2\sin A\cos A$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $2\cos A = 1$, 即 $\cos A = \frac{1}{2}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

方法二(角化边): 由余弦定理及 $\frac{b\cos C - 2a\cos A}{\cos B} = -c$, 得

$$\frac{b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 2a \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = -c, \text{ 化简得 } b^2+c^2-a^2=bc, \text{ 则}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}. \text{ 又因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, 要

使外接圆的半径最小, 只需 a 最小.

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc =$$

4, 当且仅当 $b=c=2$ 时取等号, 此时 $a=2$, 则 $R_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故

$$\triangle ABC \text{ 外接圆面积的最小值为 } \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

16. 必刷考点 ⊙ 三角恒等变换, 利用正、余弦定理解三角形

(1) 【证明】设 $OC=x$, $OB=y$, 则 $OA=2-x$, $OD=2\sqrt{2}-y$.

在 $\triangle AOD$ 中, 由余弦定理得 $AD^2 = (2-x)^2 + (2\sqrt{2}-y)^2 - 2 \times (2-x)(2\sqrt{2}-y) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $\triangle BOC$ 中, 由余弦定理得 $BC^2 = x^2 + y^2 - 2xy \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $BC=AD$, 所以 $(2-x)^2 + (2\sqrt{2}-y)^2 - 2(2-x)(2\sqrt{2}-y) \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$x^2 + y^2 - 2xy \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 化简得 } y = \sqrt{2}.$$

故 O 为 BD 的中点.

(2) 【解】方法一: 利用边和角相等, 在两个三角形中利用正弦定理列出等式, 然后分情况讨论.

在 $\triangle BOC$ 和 $\triangle AOD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BO}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{4}} =$

$$\frac{DO}{\sin A}.$$

由(1)知 $BO=DO$, 进而得 $\sin A = \sin C$.

若 $A=C$, 则 $\triangle BOC \cong \triangle DOA$, 此时有 $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$, 不满足条



$$\text{件} \sqrt{5} \sin 2A + \cos B = \sqrt{5}.$$

$$\text{故 } A+C=\pi, \text{ 此时有 } A=\pi-C=B+\frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sqrt{5} \sin 2A + \cos B = \sqrt{5}, \text{ 得 } \sqrt{5} \sin \left[2 \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \cos B = \\ \sqrt{5} \cos 2B + \cos B = \sqrt{5} (2\cos^2 B - 1) + \cos B = \sqrt{5}, \text{ 又 } B \in (0, \pi), \\ \text{所以 } -1 < \cos B < 1, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin C = \sin \left(\frac{3\pi}{4} - B \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin B + \cos B) = \\ \frac{3\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{在 } \triangle BOC \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{OC}{\sin B} = \frac{OB}{\sin C}, \text{ 故 } OC = \frac{2}{3}.$$

方法二: 结合初中几何知识, 构造全等三角形.

如图, 过点 D 作 $DE \parallel BC$, 交 AC 于点 E , 则 $\angle EDO = \angle CBO$.

$$\text{在 } \triangle OED \text{ 与 } \triangle OCB \text{ 中, } \begin{cases} \angle EDO = \angle CBO, \\ OD = OB, \\ \angle EOD = \angle COB = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

所以 $\triangle OED \cong \triangle OCB$ (ASA), 所以 $BC = DE$.

因为 $BC = AD$, 所以 $DE = DA$, 所以点 A 与点 E 重合或 $\angle A = \angle DEA$. 当点 A 与点 E 重合时, $\triangle BOC \cong \triangle DOA$, 此时有 $A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{4}$, 不满足条件 $\sqrt{5} \sin 2A + \cos B = \sqrt{5}$.

$$\text{当 } \angle A = \angle DEA \text{ 时, 易知 } \angle DEA = \frac{\pi}{4} + \angle ODE = \frac{\pi}{4} + B,$$

$$\text{所以 } A = B + \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{由 } \sqrt{5} \sin 2A + \cos B = \sqrt{5}, \text{ 得 } \sqrt{5} \sin \left[2 \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \cos B = \sqrt{5},$$

$$\text{即 } \sqrt{5} \cos 2B + \cos B = \sqrt{5},$$

$$\text{所以 } \sqrt{5} (2\cos^2 B - 1) + \cos B = \sqrt{5},$$

$$\text{即 } 2\sqrt{5} \cos^2 B + \cos B - 2\sqrt{5} = 0.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } -1 < \cos B < 1, \text{ 所以 } \cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

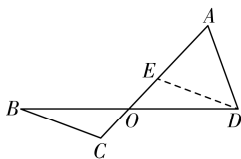
$$\text{所以 } \sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) = \sin B \cos \frac{\pi}{4} + \cos B \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{即 } \sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{在 } \triangle OBC \text{ 中, 根据正弦定理可得 } \frac{OB}{\sin C} = \frac{OC}{\sin B}, \text{ 则 } \frac{\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} =$$



$$\frac{OC}{\sqrt{5}}, \text{解得 } OC = \frac{2}{3}.$$



一题多解 (1) 如图, 分别过点 C, A 作 $CE \perp BD$ 交 BD 于点 $E, AF \perp BD$ 交 BD 于点 F , 设 $OE = x, BE = y$,

由 $\angle AOD = \angle BOC = \frac{\pi}{4}$ 得 $CE = OE = x, EF = OE + OF = OC \cdot$

$\cos \frac{\pi}{4} + OA \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, 故 $OF = AF = \sqrt{2} - x$, 进而可得

$$DF = \sqrt{2} - y.$$

由 $BC = AD$ 得 $BE^2 + CE^2 = AF^2 + DF^2$, 即 $y^2 + x^2 = (\sqrt{2} - x)^2 + (\sqrt{2} - y)^2$,

所以 $x + y = \sqrt{2}, BO = \frac{1}{2}BD$, 即 O 为 BD 的中点.

(2) 由 (1) 知, $CE = OE = DF = x, AF = OF = BE = \sqrt{2} - x$,

故 $\triangle BCE \cong \triangle ADF$, 则 $\angle OAD = \angle OAF + \angle FAD = \frac{\pi}{4} + B$.

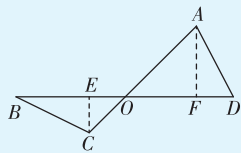
由 $\sqrt{5} \sin 2\angle OAD + \cos B = \sqrt{5}$ 得 $\sqrt{5} \sin \left[2 \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \cos B =$

$\sqrt{5} \cos 2B + \cos B = \sqrt{5} (2\cos^2 B - 1) + \cos B = \sqrt{5}$, 因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $-1 < \cos B < 1$, 所以 $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan B = \frac{CE}{BE} = \frac{x}{\sqrt{2} - x} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 故

$$OC = \frac{2}{3}.$$



真题风向练

17. ABC 命题点 ①三角函数与解三角形的综合应用

【解析】 因为 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$, 所以 $2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1 + 2\sin C = 2$, 即 $\cos^2 A + \cos^2 B + \sin C = 2$,

所以 $1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + \sin C = 2$, 即 $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$. 故 A 正确.

当 $C > \frac{\pi}{2}$ 时, $A + B < \frac{\pi}{2}$, 即 $0 < A < \frac{\pi}{2} - B < \frac{\pi}{2}$, 故有 $0 < \sin A <$

$\sin \left(\frac{\pi}{2} - B \right)$, 即 $0 < \sin A < \cos B$, 同理有 $0 < \sin B < \cos A$,



所以 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin(A+B) = \sin C$,

与 A 选项矛盾, 故 $C > \frac{\pi}{2}$ 不成立, 同理可得 $C < \frac{\pi}{2}$ 也不成立,

故 $C = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin C = 1, \cos C = 0$ (提示: 根据 A 选项的结论及

题干中已知, $\sin C$ 是比较特殊的, 所以从角 C 入手解决问题).

因为 $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$, 所以 $\cos A \cos B = \frac{1}{4}$, 因为 $A+B =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos B = \sin A$, 所以 $\cos A \sin A = \frac{1}{4}$, 即 $\sin 2A = \frac{1}{2}$, 又

$A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2A \in (0, \pi)$, 故 $2A = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$, 即 $A = \frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$.

当 $A = \frac{\pi}{12}$ 时, $\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $\frac{BC}{AC} = 2 - \sqrt{3}$

①.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{4}$, 故 $AC \cdot BC = \frac{1}{2}$ ②, 结合 ①② 可得

$$\begin{cases} AC^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \\ BC^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2, \text{ 则 } AB = \sqrt{2}, \text{ 故 B 正}$$

确, D 错误.

当 $A = \frac{\pi}{12}$ 时, $\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{12} =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

所以 $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确.

当 $A = \frac{5\pi}{12}$ 时, 同理可得 B 正确, C 正确, D 错误 (提示: B, D

选项都可以视为求斜边的长度, C 选项角 A, B 互余, $A = \frac{\pi}{12}$

与 $A = \frac{5\pi}{12}$ 结果相同).

故选 ABC.

专题 解三角形中的最值及范围问题



题型上分练

1. A 【解析】 $\because \overrightarrow{BC}^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}, \therefore a^2 = -2BC \cdot AB \cos B, \therefore a^2 =$
 $-2ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -a^2 - c^2 + b^2, \therefore 2a^2 = b^2 - c^2, \therefore \cos A =$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2\right)}{2bc} = \frac{\frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{2}c^2}{2bc} \geq \frac{2\sqrt{\frac{3}{4}bc}}{2bc} =$$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $b = \sqrt{3}c$ 时取等号, 故选 A.

2. B 【解析】 因为 $\sqrt{3}a = b(\sqrt{3}\cos C + \sin C)$, 由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A = \sqrt{3}\sin B\cos C + \sin B\sin C$.

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$, 所以 $\sqrt{3}\sin A = \sqrt{3}\sin B\cos C + \sqrt{3}\cos B\sin C = \sqrt{3}\sin B\cos C + \sin B\sin C$, 所以 $\sqrt{3}\cos B\sin C = \sin B\sin C$.

因为 $\sin C > 0$, 所以 $\tan B = \sqrt{3}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 则 $B = \frac{\pi}{3}$.

方法一: 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a+c)^2 - 3ac \geq (a+c)^2 - 3 \cdot \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{(a+c)^2}{4} = 4$,

当且仅当 $a = c = 2$ 时, 等号成立, 所以 $b \geq 2$, 即 b 的最小值为 2. 故选 B.

方法二: 由正弦定理得 $\frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $b =$

$$\frac{(a+c)\sin B}{\sin A + \sin C} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) + \sin C} = \frac{2}{\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)}, \text{ 易知 } 0 < C < \frac{2\pi}{3},$$

则当 $C = \frac{\pi}{3}$ 时, $\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$ 有最大值 1, 即 b 的最小值为 2. 故选 B.

3. 【解】 (1) 因为 $b\cos A + a\cos B = c\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以由正弦定理可得 $\sin B\cos A + \sin A\cos B = \sin C\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$, 即 $\sin(A+B) = \sin C\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$.

由于 $A+B = \pi - C$, 因此 $\sin(A+B) = \sin C = \sin C\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$.

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C > 0$, 则 $\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 则 $B + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 2ac\cos \frac{\pi}{6} = 3$,

所以 $a^2 + c^2 = 3 + \sqrt{3}ac$, 由基本不等式可得 $a^2 + c^2 \geq 2ac$, 当且仅当 $a = c$ 时等号成立,

所以 $3 + \sqrt{3}ac \geq 2ac$, 则 $ac \leq \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 3(2 + \sqrt{3})$, 则 $\triangle ABC$ 的面

积 $S = \frac{1}{2}ac\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}ac \leq \frac{1}{4} \times 3(2 + \sqrt{3}) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{4}$, 所以 $\triangle ABC$

的面积的最大值为 $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{4}$.

4. 【解】 (1) 因为 $a = 1$, $\cos A = \frac{2c-1}{2b}$, 所以 $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$, 由正弦定



理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 可得 $\cos A = \frac{2\sin C - \sin A}{2\sin B}$ (提示: 边化

角), 整理可得 $2\sin B \cos A = 2\sin C - \sin A$.

又因为 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$,

所以 $\sin A = 2\sin A \cos B$, 而 $\sin A \neq 0$, 则 $\cos B = \frac{1}{2}$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$,

所以 $\sin \angle CDB = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{CD}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$,

所以 $\sin \angle CAB = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{AC}$, 所以 $\frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{AC}$.

设 $AB = BD = t (t > 0)$, 由余弦定理得 $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos \angle CBD$,

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \angle CBA$,

可得 $CD^2 = t^2 + 1 + t$, $AC^2 = t^2 + 1 - t$,

所以 $\frac{CD^2}{AC^2} = \frac{t^2 + 1 + t}{t^2 + 1 - t} = 1 + \frac{2t}{t^2 + 1 - t} = 1 + \frac{2}{t + \frac{1}{t} - 1} \leq 1 + \frac{2}{2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 1} = 3$,

当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1$ 时等号成立,

所以 $\frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle CDB}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

5. A 【解析】利用正弦定理可将原等式化为 $\frac{a-b+c}{c} = \frac{a+c}{\sqrt{3}+b}$, 若

$a = \sqrt{3}$, 整理得 $bc = b^2 + c^2 - a^2$,

故 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. 由正弦

定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2$, 则 $b + 2c = 2\sin B +$

$4\sin C = 2\sin B + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = 4\sin B + 2\sqrt{3}\cos B = 2\sqrt{7}\sin(B +$

$\theta)$, 其中 θ 为锐角, $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 故当 $B + \theta =$

$\frac{\pi}{2}$ 时, $b + 2c$ 取得最大值为 $2\sqrt{7}$. 故选 A.

6. 【解】(1) 因为 $(2ac + 4c^2) \cos B = a^2 - b^2 - c^2$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, 所以 $(2ac + 4c^2) \cos B = -2bccos A$, 即 $(a + 2c) \cos B = -b \cos A$.

由正弦定理可得 $\sin A \cos B + 2\sin C \cos B = -\sin B \cos A$, 即

$\sin A \cos B + \sin B \cos A + 2\sin C \cos B = 0$, 所以 $\sin C + 2\sin C \cos B = 0$.



又 $0^\circ < C < 180^\circ$, 所以 $\sin C > 0$, 所以 $1 + 2\cos B = 0$, 即 $\cos B = -\frac{1}{2}$. 又 $0^\circ < B < 180^\circ$, 所以 $B = 120^\circ$.

(2) 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin 30^\circ} =$

$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} \text{ ①}, \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \text{ ②}.$$

设 $\angle ACB = \theta$, $0^\circ < \theta < 60^\circ$, 则 $\angle ACD = 120^\circ - \theta$, $\angle ADC = 30^\circ + \theta$, $\angle CAB = 60^\circ - \theta$,

$$\text{①②相除可得} \frac{2CD \sin(60^\circ - \theta)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(30^\circ + \theta)},$$

$$\text{即 } CD = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(30^\circ + \theta) \sin(60^\circ - \theta)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cos[(30^\circ + \theta) - (60^\circ - \theta)] - \cos[(30^\circ + \theta) + (60^\circ - \theta)]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cos(2\theta - 30^\circ)},$$

故当 $2\theta - 30^\circ = 0^\circ$, 即 $\theta = 15^\circ$ 时, $\cos(2\theta - 30^\circ)$ 取得最大值 1,

故 CD 的最小值为 $\sqrt{3}$.

7. 【解】 (1) 由题可得 $2\cos A \cos C (\tan A + \tan C) = \tan B$,

$$\text{即 } 2\cos A \cos C \left(\frac{\sin A \cos C + \cos A \sin C}{\cos A \cos C} \right) = 2\sin(A+C) = \frac{\sin B}{\cos B},$$

因为 $A+B+C=\pi$, $\sin B \neq 0$, 所以 $2\sin B = \frac{\sin B}{\cos B}$, 即 $\cos B = \frac{1}{2}$,

因为 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac, L = a+b+c = a+c+2\sqrt{3}, \text{由余弦定理可}$$

得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $12 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac$, 即 $(a+c+2\sqrt{3})(a+c-2\sqrt{3}) = 3ac$.

$$\frac{S}{L} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ac}{a+c+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a+c-2\sqrt{3}}{3ac} \cdot ac = \frac{\sqrt{3}}{12}(a+c-2\sqrt{3}), \text{由}$$

正弦定理可得 $a = 4\sin A$, $c = 4\sin C$, 则 $a+c = 4\sin A + 4\sin C =$

$$4 \left[\sin A + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) \right] = 4\sqrt{3} \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right),$$

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, 即 $A + \frac{\pi}{6} \in$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right), \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right],$$

所以 $a+c \in (6, 4\sqrt{3}]$, 所以 $\frac{S}{L} \in \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

故 $\frac{S}{L}$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.



一题多解 (2) 由正弦定理可得 $a=4\sin A, c=4\sin C$, 则

$$\begin{aligned}\frac{S}{L} &= \frac{\frac{1}{2}ac\sin B}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ac}{a+c+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16\sin A\sin C}{4(\sin A+\sin C)+2\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}{2\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1}{2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin\left[2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+1}{2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\cos\left[2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sin^2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)-1}{2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1} = \frac{1}{2} \left[2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)-1 \right] \\ &= \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3},$$

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 所以 $\frac{S}{L} \in \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

故 $\frac{S}{L}$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

8. D 【解析】因为 $2a\sin A - b\sin B = 3c\sin C$, 所以由正弦定理得

$$2a^2 - b^2 = 3c^2, \text{ 所以 } a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{2}c^2, \text{ 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 - c^2}{4bc}.$$

$$\text{所以 } \left(\frac{S}{b^2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)^2}{b^4} = \frac{c^2\sin^2 A}{4b^2} = \frac{c^2(1-\cos^2 A)}{4b^2} = \frac{1}{64} \left(-\frac{c^4}{b^4} + \frac{18c^2}{b^2} - 1\right),$$

$$\text{令 } \frac{c^2}{b^2} = t (t > 0), \text{ 则 } \left(\frac{S}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{64}(-t^2 + 18t - 1) \leq \frac{5}{4}, \text{ 当且仅当 } t =$$

$$9, \text{ 即 } c = 3b \text{ 时取等号, 所以 } \frac{S}{b^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 所以 } \frac{S}{b^2} \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选 D.

9. D 【解析】 $\because A = \frac{C-B}{2}$, 且 $A+B+C = \pi$, $\therefore A = 2C - \pi, B = 2\pi - 3C$,

$$\therefore C \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \cos C \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \sin C > 0, \text{ 由正弦定理得}$$

$$\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore c = \frac{3\sin C}{\sin A + \sin B} = -\frac{3\sin C}{\sin 2C + \sin 3C} = -\frac{3\sin C}{\sin 2C + \sin(2C+C)}$$

$$= -\frac{3\sin C}{\sin 2C(1+\cos C) + \cos 2C\sin C}$$

关键点



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3\sin C}{2\sin C \cos C(1+\cos C) + (2\cos^2 C - 1)\sin C} \\
 &= -\frac{3}{4\cos^2 C + 2\cos C - 1} = -\frac{3}{4\left(\cos C + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}},
 \end{aligned}$$

则当 $\cos C = -\frac{1}{4}$ 时, 边 c 取得最小值 $\frac{12}{5}$. 故选 D.

10. C 【解析】如图所示, 设 $AB=c, AC=b, BC=a$.

因为 B, C, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

设 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

又角 A 的平分线交 BC 于点 D , 所以四边形 $AEDF$ 为菱形 (提示: 由 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ 可得四边形 $AEDF$ 为平行四边形, 再结合角平分线, 就可以判定为菱形), 可得 $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AF}|$, 所以

$$c = \frac{3}{2}|\overrightarrow{AE}|, b = 3|\overrightarrow{AF}|, \text{ 所以 } b = 2c.$$

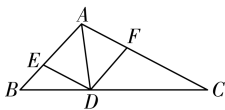
在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5c^2 - 9}{4c^2}$,

$$\text{则 } \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \frac{3\sqrt{-c^4 + 10c^2 - 9}}{4c^2}.$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot c \cdot$

$$\frac{3\sqrt{-c^4 + 10c^2 - 9}}{4c^2} = \frac{3}{4}\sqrt{-c^4 + 10c^2 - 9}, \text{ 当 } c^2 = 5 \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面}$$

积取得最大值, 最大值为 3. 故选 C.



11. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\sin(A+C) = \sin B, S =$

$$\frac{1}{2}ac \sin B,$$

由 $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2 - a^2}$ 得 $\sin B = \frac{ac \sin B}{b^2 - a^2}$. 因为 $\sin B \neq 0$, 所以

$$b^2 - a^2 = ac.$$

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 则 $ac = c^2 - 2ac \cos B$, 故 $c = 2a \cos B + a$.

由正弦定理得 $\sin C = 2 \sin A \cos B + \sin A$, 又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 所以 $\sin(B-A) = \sin A$. 因为 $A, B \in (0, \pi)$, 所以 $B-A=A$ 或 $B-A=\pi-A$ (舍去), 所以 $B=2A$.

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 所以 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{3}$$



$$\frac{\pi}{4}, \text{ 故 } \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan A < 1.$$

$\tan A + \frac{1}{3 \tan(B-A)} = \tan A + \frac{1}{3 \tan A}$, 根据复合函数的性质可知,

$$y = \tan A + \frac{1}{3 \tan A} \text{ 在 } A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \text{ 上单调递增, 所以 } \tan A + \frac{1}{3 \tan A} \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

12. $\sqrt{3}$ 【解析】由 $AB = mBC (m > 1)$, 设 $BC = a$, 则 $AB = ma$.

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + m^2 a^2 - 4}{2ma^2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) - \frac{2}{ma^2}$, 所以

$$ma^2 = \frac{2}{\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) - \cos B},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} ma^2 \sin B = \frac{\sin B}{\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) - \cos B}.$$

令 $\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) = t$, 由 $m > 1$, 易得 $t > 1$, 所以 $S = f(B) = \frac{\sin B}{t - \cos B}$ ($0 < B < \pi$),

$$\text{所以 } f'(B) = \frac{\cos B(t - \cos B) - \sin B \cdot \sin B}{(t - \cos B)^2} = \frac{t \left(\cos B - \frac{1}{t} \right)}{(t - \cos B)^2},$$

当 $\cos B > \frac{1}{t}$ 时, $f'(B) > 0$; 当 $\cos B < \frac{1}{t}$ 时, $f'(B) < 0$,

又 $y = \cos B$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 所以当 $\cos B = \frac{1}{t}$ 时, 面积

$$\text{取得最大值, 即 } \cos B = \frac{1}{t} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $m + \frac{1}{m} = 2t = \frac{4}{\sqrt{3}}$, 即 $m^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}m + 1 = 0$. 又 $m > 1$, 解得 $m = \sqrt{3}$.

13. (1) 【证明】已知 $b \sin B - a \sin A = \sin C (2b \cos 2B - c)$, 由正弦定理得 $b^2 - a^2 = c(2b \cos 2B - c)$, 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bcc \cos 2B$, 再由余弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bcc \cos A$, 则 $\cos A = \cos 2B$, 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $2B \in (0, \pi)$, 因为余弦函数在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 所以 $A = 2B$, 得证.

(2) 【解】由 $A = 2B, A + B + C = \pi$, 得 $C = \pi - 3B$, 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 < A = 2B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = \pi - 3B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{则 } \cos B \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin 3B}{\sin 2B} = \frac{\sin(B+2B)}{2 \sin B \cos B} =$$



$$\frac{\sin B \cos 2B + \cos B \sin 2B}{2 \sin B \cos B} = \frac{\sin B (\cos 2B + 2 \cos^2 B)}{2 \sin B \cos B} = \frac{4 \cos^2 B - 1}{2 \cos B} =$$

$$2 \cos B - \frac{1}{2 \cos B}.$$

令 $t = \cos B$, $t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\frac{c}{a} = 2t - \frac{1}{2t}$, 因为函数 $f(t) = 2t - \frac{1}{2t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\frac{c}{a} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 故 $\frac{c}{a}$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

第2章 ▶ 真题综合测试

题组 1

1. D 必刷考点 ⊙ 利用正、余弦定理解三角形

【解析】因为 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{1}{2}$, 根据正弦定理得 $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, 即 $c = 2b$, 代

入 $c^2 - b^2 = 2ab$ 得 $4b^2 - b^2 = 2ab$, 所以 $a = \frac{3}{2}b$, 所以由余弦定理

$$\text{得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 4b^2 - \frac{9}{4}b^2}{2 \times b \times 2b} = \frac{11}{16}, \text{ 故选 D.}$$

2. A 必刷考点 ⊙ 正、余弦定理的综合应用

【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 的外

接圆半径) 及 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1, 得 $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{2}$,

$\sin B = \frac{b}{2}$, $\sin C = \frac{c}{2}$, 代入 $S = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$ 得 $S = \left(\frac{a}{2}\right)^2 +$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$. 由余弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 =$

$2ab \cos C$, 又 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$, 所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{2ab \cos C}{4}$, 化简得

$\sin C = \cos C$, 因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

3. A 命题点 ⊙ 数学文化背景下解三角形问题的实际应用

【解析】过点 D 作 $DM \parallel AC$, 交 AB 于点 M (图略). 由题意可得 D, F, M 三点共线. 设 $\angle DHE = \alpha$, $\angle FCG = \beta$, 则 $\angle BDM = \alpha$,

$\angle BFM = \beta$. 因为 $\frac{BM}{MD} = \tan \alpha$, $\frac{BM}{MF} = \tan \beta$, 所以 $\frac{BM}{\tan \alpha} = MD$, $\frac{BM}{\tan \beta} =$

MF , 两式作差可得 $\frac{BM}{\tan \beta} - \frac{BM}{\tan \alpha} = MF - MD = DF = EG$, 所以 $BM =$

$\frac{EG}{\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{EG}{\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta}} = \frac{EG \cdot \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$. 又因为 $DE = FG$, 所以 $BM = \frac{EG \cdot DE}{GC - EH}$, 所

以海岛的高 $AB = AM + BM = AM + \frac{EG \cdot DE}{GC - EH} = DE + \frac{EG \cdot DE}{GC - EH}$. 故选

A.

4. $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ 命题点 ⊙ 正弦定理的应用、同角三角函数的基本关



系

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi)$, 则 $\sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, 即 $\frac{3}{\sin B} = \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$,

$$\text{故 } \sin B = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

5. $2\sqrt{2}$ 命题点 $\odot$ 三角形面积公式和余弦定理的应用

【解析】 $\because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}, B = 60^\circ, \therefore \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ac \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$

$$\therefore ac = 4. \text{ 又 } \because a^2 + c^2 = 3ac, \therefore a^2 + c^2 = 12.$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 12 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$, 得 $b = 2\sqrt{2}$.

6. $\sqrt{3}$ 必刷考点 $\odot$ 余弦定理和三角形面积公式、基本不等式求最值

【解析】依题意, $\cos B = b \cos C$, 即 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 因

为 $a = 2, c = 3$, 所以 $b = \sqrt{7}$, 所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$. 又 $0 < B <$

π , 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. 设 $BP = x, BQ = y$, 由题意知 $S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, 即

$$\frac{1}{2}xy \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}ac \sin B, \text{ 即 } xy = \frac{1}{2}ac = 3, \text{ 所以 } PQ^2 = x^2 + y^2 -$$

$2xy \cos B = x^2 + y^2 - 3 \geq 2xy - 3 = 3$, 当且仅当 $x = y = \sqrt{3}$ 时, 等号成立, 所以 PQ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

7. 命题点 $\odot$ 利用正弦定理、余弦定理解三角形

【解】方案一: 选条件①.

$$\text{由 } C = \frac{\pi}{6} \text{ 及余弦定理得 } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \sin A = \sqrt{3} \sin B \text{ 及正弦定理得 } a = \sqrt{3}b. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } \frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由此可得 } b = c. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } ① ac = \sqrt{3}, \text{ 解得 } a = \sqrt{3}, b = c = 1. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因此, 选条件①时问题中的三角形存在, 此时 $c = 1$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

方案二: 选条件②.

$$\text{由 } C = \frac{\pi}{6} \text{ 及余弦定理得 } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \sin A = \sqrt{3} \sin B \text{ 及正弦定理得 } a = \sqrt{3}b. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } \frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由此可得 } b = c, B = C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{由 } ② c \sin A = 3, \text{ 所以 } c = b = 2\sqrt{3}, a = 6. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因此, 选条件②时问题中的三角形存在, 此时 $c = 2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

方案三: 选条件③.



由 $C = \frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

由 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ 及正弦定理得 $a = \sqrt{3}b$ 5 分

于是 $\frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由此可得 $b = c$ 8 分

由 ③ $c = \sqrt{3}b$, 与 $b = c$ 矛盾, 9 分

因此, 选条件 ③ 时问题中的三角形不存在. 10 分

8. 命题点 ① 正、余弦定理, 三角形面积公式的应用, 两角和的正弦公式

【解】 (1) 已知 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$, 则有 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 3 分

又 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$, 所以 $\cos B = \frac{\sin C}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 由 (1) 可得 $C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理, 不妨令 $\frac{c}{\sin C} =$

$\frac{b}{\sin B} = k (k > 0)$, 则有 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}k$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}k$ 8 分

又 $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \sin (B + C) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}k \cdot$

$\frac{\sqrt{2}}{2}k (\sin B \cos C + \cos B \sin C) = \frac{\sqrt{6}}{8}k^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

$\frac{\sqrt{6}}{8}k^2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 3 + \sqrt{3}$, 解得 $k = 4$ (负值舍去), 故 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}k =$

$2\sqrt{2}$ 13 分

9. 命题点 ① 正、余弦定理, 三角形面积公式

【解】 (1) 由题意, 得 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$, $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

由 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $a^2 + c^2 - b^2 = 2$ 3 分

则由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{ac} > 0$.

又 $\therefore \sin B = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\therefore ac = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 5 分

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ 6 分

(2) 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 3b$,



$$\therefore \sin A = \frac{a}{3b}, \sin C = \frac{c}{3b}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin A \sin C = \frac{a}{3b} \cdot \frac{c}{3b} = \frac{ac}{9b^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{9b^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{解得 } b = \frac{1}{2}.$$

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

10. 命题点 三角恒等变换、正弦定理、三角形面积公式的应用

(1) 【证明】第一步: 由诱导公式及同角三角函数基本关系
求出 A, B, C 的正弦值之间的关系.

由题意知 $\cos^2(A+C) + \sin A \sin C = 1$,

$$\therefore A+C = \pi - B, \therefore \cos(A+C) = -\cos B, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{故有 } \cos^2 B + \sin A \sin C = 1,$$

$$\text{又 } \therefore \cos^2 B + \sin^2 B = 1,$$

$$\therefore \sin A \sin C = \sin^2 B. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

第二步: 由正弦定理化角为边求出 a, b, c 之间的关系.

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (} a, b, c \text{ 分别为 } \triangle ABC \text{ 的内角}$$

A, B, C 的对边),

$$\text{可得 } ac = b^2. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

第三步: 由余弦定理求出 a, c 之间的关系.

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{3}{4} = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac}, \text{整理得 } 2a^2 + 2c^2 - 5ac =$$

$$0, \text{解得 } 2a = c \text{ 或 } a = 2c. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

第四步: 得出 A, C 中有一角为钝角.

$$\text{不妨取 } a = 2c, \therefore b^2 = ac = 2c^2, \therefore b = \sqrt{2}c,$$

$$\text{则 } \cos A = \frac{2c^2 + c^2 - (2c)^2}{2(\sqrt{2}c) \cdot c} = \frac{-c^2}{2\sqrt{2}c^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0.$$

$$\therefore A \in (0, 2\pi), \therefore A \text{ 为钝角.}$$

同理, 若 $c = 2a$, 则 $\cos C < 0$, C 为钝角.

综上所述, $\triangle ABC$ 为钝角三角形. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 【解】第一步: 由 B 的余弦值求出其正弦值.

$$\text{由题可得 } \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

第二步: 结合三角形的面积求出 b 的值.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}, \therefore ac = 2. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由(1)知 } b^2 = ac = 2, \therefore b = \sqrt{2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

第三步: 由 a, c 间的关系求出 $a+c$ 的值.

$$\text{又由(1)知 } a^2 + c^2 = \frac{5}{2}ac = \frac{5}{2} \times 2 = 5,$$

$$\therefore (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 5 + 2 \times 2 = 9, \therefore a+c = 3. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

第四步: 求出 $\triangle ABC$ 的周长.

$$\text{从而 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = 3+\sqrt{2}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$



快解 (1) 第一步: 利用三角形内角和求得 $A+C$ 与 B 的余弦值之间的关系.

$$\because A+C=\pi-B, \therefore \cos(A+C)=-\cos B. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

第二步: 结合两角和的余弦公式求出 $\cos A \cos C$ 的值.

$$\text{又} \because \cos(A+C)=\cos A \cos C-\sin A \sin C,$$

$$\therefore \cos^2(A+C)+\sin A \sin C=\cos^2 B+\cos A \cos C-\cos(A+C)=1,$$

$$\therefore \cos A \cos C=-\frac{5}{16}<0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

第三步: 由钝角的余弦值为负证得结论.

$$\text{又} A, C \in (0, \pi),$$

$$\therefore A, C \text{ 中有一角为钝角}, \therefore \triangle ABC \text{ 为钝角三角形.} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 第一步: 由同角三角函数基本关系求 $\sin B$ 的值.

$$\text{由} \cos B=\frac{3}{4}, \text{得} \sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

第二步: 结合三角形面积公式求 ac 的值.

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac \sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}, \therefore ac=2. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

第三步: 结合已知条件求出 $\sin A \sin C$ 的值.

$$\because \cos^2(A+C)+\sin A \sin C=1, \therefore \sin A \sin C=\frac{7}{16}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

第四步: 由正弦定理求 b 的值.

$$\text{故由正弦定理得} \left(\frac{b}{\sin B}\right)^2=\frac{ac}{\sin A \sin C}, \therefore b=\sqrt{2}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

第五步: 由余弦定理求 $a+c$ 的值, 进而求得周长.

$$\text{由余弦定理得} \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\therefore 2ac \cos B=(a+c)^2-2ac-b^2,$$

$$\therefore a+c=3,$$

$$\text{故} \triangle ABC \text{ 的周长为} a+b+c=3+\sqrt{2}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

11. 命题点 ◎三角恒等变换、利用正弦定理解三角形

【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=3C$, 又 $A+B+C=\pi$,

$$\text{所以} C=\frac{\pi}{4}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又因为} 2\sin(A-C)=\sin B, \text{即} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B,$$

$$\text{所以} \sin B=2\cos B. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又因为} \sin^2 B+\cos^2 B=1, B \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以} \sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos B=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以} \sin A=\sin(B+C)=\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\sin B \cos \frac{\pi}{4}+\cos B \cdot$$

$$\sin \frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 记内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,



因为 $AB=c=5, C=\frac{\pi}{4}, \sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, 可得 $\frac{b}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

解得 $b=2\sqrt{10}$ 8 分

所以 AB 边上的高为 $b\sin A=2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$ 10 分

一题多解

(1) 因为 $A+B=3C, A+B+C=\pi$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

..... 2 分

因为 $2\sin(A-C)=\sin B$, 所以 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$,

所以 $\sqrt{2}\sin A-\sqrt{2}\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$,

即 $\sin A=3\cos A$ 3 分

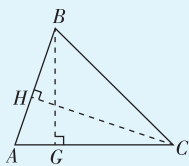
因为 $\sin^2 A+\cos^2 A=1, A\in\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$,

所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 5 分

(2) 如图, 过点 B 作 $BG\perp AC$ 于点 G ,

过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H ,

由 (1) 知 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



因为 $AB=5$, 所以 $BG=AB\cdot\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{2}$,

所以 $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 6 分

因为 $C=\frac{\pi}{4}$, 所以 $CG=BG=\frac{3\sqrt{10}}{2}$,

所以 $AC=AG+CG=2\sqrt{10}$, 8 分

所以 $CH=\frac{BG\cdot AC}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}\times 2\sqrt{10}}{5}=6$,

即 AB 边上的高为 6. 10 分

12. 命题点 ①同角三角函数的基本关系, 利用正、余弦定理解三角形

【解】(1) 第一步: 利用余弦定理求出 AC .

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot$

$$\cos B=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 3\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=9,$$

解得 $AC=3$ 3 分

第二步: 利用余弦定理求得 $\cos A$.

$$\text{则 } \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 3\times 3}=\frac{1}{3}. \text{ 6 分}$$

(2) 第一步: 利用诱导公式求出 $\angle DAE$ 的正弦值.



由 $AE \perp AC$ 得 $\angle EAC = \frac{\pi}{2}$, 由 (1) 知 $\angle BAC$ 为锐角, 则点 C, E

在直线 BA 的同侧, 7 分

由 D 在 BA 的延长线上, 得 $\cos \angle BAC = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \angle DAE \right) =$

$\sin \angle DAE = \frac{1}{3}$ 9 分

第二步: 利用平行关系中同旁内角互补求出 $\sin D$.

因为 $DE \parallel BC$, 所以 $D + B = \pi$, 即 $\cos D = -\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 由 $D \in$

$(0, \pi)$, 得 $\sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 11 分

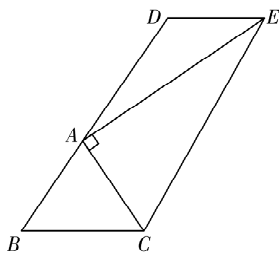
第三步: 利用正弦定理求得 AE .

在 $\triangle ADE$ 中, 由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin \angle DAE} = \frac{AE}{\sin D}$, 即 $\frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{AE}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$,

解得 $AE = 6$ 13 分

第四步: 利用勾股定理求出 CE .

故在 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中, $CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ 15 分



一题多解 (1) 第一步: 由余弦定理求 AC .

由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 9 + 12 -$
 $2 \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$, 所以 $AC = 3$ 3 分

第二步: 由二倍角公式求 $\cos \angle BAC$.

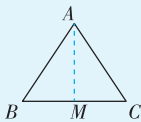
故 $AB = AC$, 如图, 取 BC 的中点 M , 连接 AM , 则 $AM \perp BC$,
 $\angle BAC = 2 \angle BAM$,

$$\cos \angle BAM = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BM^2}}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

..... 4 分

$$\text{所以 } \cos \angle BAC = 2 \cos^2 \angle BAM - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 - 1 = \frac{1}{3}.$$

..... 6 分



13. 必刷考点 ① 解三角形中与边有关的范围问题

【解】 (1) 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM}$ 得 $\frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 2b \times \frac{\sqrt{3}}{2} +$

$\frac{1}{2} \times 2c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $bc = 2(b+c)$, ①

又由余弦定理得, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, $63 = b^2 + c^2 + bc$, ②



由①②解得 $b+c=9$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $9+3\sqrt{7}$.

(2) 由三角形面积公式得 $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}a \times \frac{3}{4}a$, 即 $a^2 =$

$\frac{4}{3}bc\sin A$, 又由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 所以 $b^2+c^2 =$

$a^2+2bccos A = \frac{4}{3}bc\sin A+2bccos A$, 所以 $\frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{b^2+c^2+2bc}{bc} =$

$\frac{b^2+c^2}{bc}+2 = \frac{4}{3}\sin A+2\cos A+2 = \frac{2\sqrt{13}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin A +$

$\frac{3}{\sqrt{13}}\cos A\right)+2 = \frac{2\sqrt{13}}{3}\sin(A+\varphi)+2 \leq \frac{2\sqrt{13}}{3}+2$, 当且仅当

$\sin(A+\varphi)=1$, 其中 $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, 即 $\sin A =$

$\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 时取等号,

又 $\frac{(b+c)^2}{bc} \geq \frac{(2\sqrt{bc})^2}{bc} = 4$, 当且仅当 $b=c$ 时取等号, 所以

$\frac{(b+c)^2}{bc}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{13}}{3}+2$, 最小值为 4.

题组 2

1. B 命题点 ①正弦定理、余弦定理的综合应用

【解析】因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$, 所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$, 即 $a^2-c^2=ab-b^2$, 故 $a^2+b^2-c^2=ab$, 故 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$. 因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C =$

$\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

2. C 命题点 ①解三角形在实际生活中的应用

【解析】由题意可知, $\cos \alpha = \frac{r}{r+36\,000} = \frac{6\,400}{6\,400+36\,000} \approx 0.15$,

所以从同步卫星上可望见的地球表面的表面积 $S = 2\pi r^2(1-\cos \alpha) \approx 2\pi r^2(1-0.15)$, 此表面积与地球表面积之比约为

$\frac{2\pi r^2(1-0.15)}{4\pi r^2} = \frac{0.85}{2} = 0.425 \approx 42\%$, 故选 C.

3. C 必刷考点 ①利用正、余弦定理解三角形

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $c = a\cos B$ 及余弦定理得 $c = a \cdot$

$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, 整理得 $b^2+c^2=a^2$, 因此 $A=90^\circ$, 而 $a=5$, 则由正弦

定理得 $b=5\sin B, c=5\cos B$, 又 $\sin B+\cos B=\frac{7}{5}$, 于是 $b+c=$

$7, b^2+c^2+2bc=49$, 而 $b^2+c^2=25$, 则 $bc=12$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = 6$. 故选 C.

4. C 命题点 ①利用正、余弦定理解三角形

【解析】 $\because b^2 = \frac{9}{4}ac, \therefore$ 由正弦定理可得 $\sin^2 B = \frac{9}{4}\sin A\sin C$.



$\because B=60^\circ, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \sin A \sin C, \therefore \sin A \sin C = \frac{1}{3}$. 由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$, 将 $b^2 = \frac{9}{4}ac$ 代入, 整理得 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$, 由正弦定理得 $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C$, 则 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{13}{4} \sin A \sin C + 2 \sin A \sin C = \frac{21}{4} \sin A \sin C = \frac{21}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{4}, \therefore \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ (舍). 故选 C.

5. A 必刷知识 ⊙ 正弦定理、余弦定理、基本不等式

【解析】因为 $\frac{6c \sin C + 2b \sin B}{\sin A} = 4c \sin B + a$, 所以由正弦定理得

$$\frac{6c^2 + 2b^2}{a} = 4c \sin B + a, \text{ 即 } 6c^2 + 2b^2 = 4ac \sin B + a^2.$$

由余弦定理得 $6c^2 + 2(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) = 4ac \sin B + a^2$, 化简得

$$8c^2 + a^2 = 4ac (\sin B + \cos B), \text{ 即 } \sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{8c^2 + a^2}{4\sqrt{2}ac} \geq$$

$$\frac{2\sqrt{8c^2 \cdot a^2}}{4\sqrt{2}ac} = 1, \text{ 当且仅当 } a^2 = 8c^2, \text{ 即 } a = 2\sqrt{2}c \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{又 } \sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \text{ 故 } \sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } B = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{由 } a = 2\sqrt{2}c, \text{ 得 } \sin A = 2\sqrt{2} \sin C = 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + A \right), \text{ 整理得}$$

$$\sin A = 2 \sin A + 2 \cos A, \text{ 故 } \tan A = -2. \text{ 故选 A.}$$

6. 命题点 ⊙ 利用正弦定理解三角形

$$\text{【解】(1) 由 } \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2, \text{ 得 } 2 \left(\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) = 2,$$

$$\text{所以 } \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 1. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } A \in (0, \pi), \text{ 得 } A + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right), \text{ 所以 } A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } A, B, C \text{ 为三角形内角, 得 } \sin B \neq 0, \sin C \neq 0.$$

$$\text{因为 } \sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B,$$

$$\text{所以由正弦定理得 } \sqrt{2} \sin B \sin C = \sin C \sin 2B,$$

$$\text{所以 } \sqrt{2} \sin B = \sin 2B, \text{ 即 } \sqrt{2} \sin B = 2 \sin B \cos B, \text{ 所以 } \cos B =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{4}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } a = 2, A = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以由正弦定理得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{4}, \text{ 得 } C = \frac{7\pi}{12}, \text{ 所以 } \sin C = \sin \frac{7\pi}{12} =$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以由正弦定理得 } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a + b + c = 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}.$$

$$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

7. 命题点 ① 利用正弦定理、余弦定理、三角形面积公式解三角形

$$\text{【解】(1) 在 } \triangle ABC \text{ 中, } A \in (0, \pi), \cos A = -\frac{1}{3},$$

$$\text{又 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore a \sin C = c \sin A = 4\sqrt{2}, \therefore c = 6. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 选条件①.

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } \cos A = -\frac{1}{3} < 0, \therefore A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

$$\because a = c = 6, \therefore \triangle ABC \text{ 是等腰三角形, 且 } A = C,$$

此时 $\triangle ABC$ 内角和大于 π , 即 $\triangle ABC$ 不存在, 故不选条件①.

选条件②.

$$\because a \sin B = b \sin A = \frac{10\sqrt{2}}{3}, \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore b = 5. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由(1)知 $c = 6$, 则由余弦定理可得

$$6^2 + 5^2 - a^2 = 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore a = 9 \text{ (负值舍去)}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 9 \sin C = 4\sqrt{2}, \therefore \sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{设 } BC \text{ 边上的高为 } h, \therefore h = b \sin C = 5 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

选条件③.

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 10\sqrt{2}, c = 6, \therefore b = 5. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{3}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a = 9 \text{ (负值舍去)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设 } BC \text{ 边上的高为 } h, \text{ 则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah = 10\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } h = \frac{20\sqrt{2}}{9}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

8. 命题点 ② 三角形面积公式、解三角形

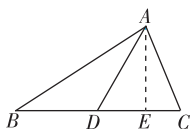
【解】(1) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

如图,过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = \frac{\pi}{3}$, $AD = 1$, 所以

$$DE = \frac{1}{2}, AE = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$



$$\text{因为 } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } CD = BD = 2, \text{ 所以 } BE = \frac{5}{2}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2bccos \angle BAC + b^2) = 1,$$

$$\text{即 } bccos \angle BAC = -2 \text{ ①}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \sqrt{3}, \text{ 即 } bc \sin \angle BAC = 2\sqrt{3} \text{ ②}.$$

$$\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 ①② 解得 } \tan \angle BAC = -\sqrt{3}, \text{ 所以 } \angle BAC = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } bc = 4.$$

$$\text{又因为 } b^2 + c^2 = 8, \text{ 所以 } b = c = 2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



一题多解 (1) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times DC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } DC = 2,$$

$$\text{所以 } BD = DC = 2, BC = 4. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \angle ADC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ADB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理得 } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB = 1 + 4 + 2 = 7, \text{ 所以 } AB = \sqrt{7}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin B},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{AD \sin \angle ADB}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } D \text{ 为 } BC \text{ 的中点, 所以 } BD = \frac{1}{2}a.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos B = \frac{c^2 + BD^2 - AD^2}{2c \cdot BD} =$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 即 } \frac{c^2 + \frac{1}{4}a^2 - 1}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2}a^2 = b^2 + c^2 - 2 = 6, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \sin \angle ADC = 1,$$

$$\text{即 } \angle ADC = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } AD \text{ 既是中线也是高线, 所以 } \triangle ABC \text{ 为}$$

$$\text{等腰三角形, 所以 } b = c = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

9. 命题点 ④ 利用正弦定理、余弦定理解三角形

$$\text{【解】(1) 由正弦定理知 } 2c = 3a, \text{ 联立 } c = a + 2, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4, \\ c = 6, \end{cases}$$

$$\text{则 } b = a + 1 = 5. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理可知 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{8}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{7}}{4}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } c = a + 2 = b + 1, \text{ 所以 } c > b > a,$$

因此若存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则角 C 为钝角,

$$\text{因此只需满足 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0, \text{ 即 } a^2 + b^2 < c^2, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$



则 $a^2 + (a+1)^2 < (a+2)^2$,

化简得 $a^2 - 2a - 3 < 0$, 解得 $-1 < a < 3$ 8 分

因为 a 为正整数, 所以 a 可取 1, 2 (易错: 本题容易求出正整数 a 的值后忽视检验, 其中不满足三角形三边关系的情况要删去).

当 $a=1$ 时, $\triangle ABC$ 的三边长分别为 1, 2, 3, 此时不满足三角形的三边关系, 即该三角形不存在; 10 分

当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2, 3, 4, 满足题意.

因此当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 为钝角三角形. 12 分

10. 命题点 ① 利用正弦定理和余弦定理解三角形

(1) 【证明】在 $\triangle ABC$ 中, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$.

由正弦定理得 $BD \cdot b = ac$.

又 $b^2 = ac$, 所以 $BD = b$ 3 分

(2) 【解】因为 $AD = 2DC$, $AC = b$,

所以 $AD = \frac{2}{3}b$, $CD = \frac{1}{3}b$ 4 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $\cos A =$

$$\frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{c^2 + \frac{4}{9}b^2 - b^2}{2c \cdot \frac{2}{3}b} = \frac{9c^2 - 5b^2}{12bc}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}, \text{ 所以 } \frac{9c^2 - 5b^2}{12bc} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}, \text{ 整理得 } 6a^2 + 3c^2 - 11b^2 =$$

$$0. \text{ 又 } b^2 = ac, \text{ 所以 } 6a^2 + 3c^2 - 11ac = 0,$$

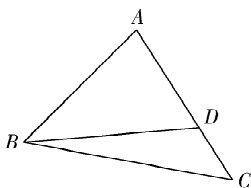
$$\text{解得 } a = \frac{3c}{2} \text{ 或 } a = \frac{c}{3}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } b^2 = ac > (a-c)^2, \text{ 解得 } \frac{3-\sqrt{5}}{2}c < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}c,$$

$$\text{所以 } a = \frac{3c}{2}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$\frac{\frac{9c^2}{4} + c^2}{2 \times \frac{3c}{2} \cdot c} - \frac{1}{2} = \frac{13}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$





一题多解 (2) 因为 $AD=2DC, AC=b$,

所以 $AD=\frac{2}{3}b, CD=\frac{1}{3}b$ 4 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} =$

$$\frac{\frac{4}{9}b^2 + b^2 - c^2}{2 \times \frac{2}{3}b \cdot b} = \frac{13b^2 - 9c^2}{12b^2}. \text{ 6 分}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot CD} =$

$$\frac{b^2 + \frac{1}{9}b^2 - a^2}{2b \cdot \frac{1}{3}b} = \frac{10b^2 - 9a^2}{6b^2}.$$

所以 $\frac{13b^2 - 9c^2}{12b^2} = -\frac{10b^2 - 9a^2}{6b^2}$, 整理得 $6a^2 + 3c^2 - 11b^2 = 0$.

..... 8 分

又 $b^2 = ac$, 所以 $6a^2 + 3c^2 - 11ac = 0$, 所以 $a = \frac{3c}{2}$ 或 $a = \frac{c}{3}$.

因为 $b^2 = ac > (a-c)^2$, 解得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}c < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}c$, 所以 $a = \frac{3c}{2}$.

所以在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$$\frac{\frac{9c^2}{4} + c^2}{2 \times \frac{3c}{2} \cdot c} - \frac{1}{2} = \frac{13}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \text{ 12 分}$$

11. 命题点 ⊙ 正弦定理、余弦定理的应用

【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle BAC = 120^\circ, AB = 2, AC = 1$,

所以由余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = 7$, 所以 $BC = \sqrt{7}$ 3 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$,

即 $\frac{1}{\sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 解得 $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 且 $\angle BAC = 120^\circ$,

所以 $\cos \angle ABC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ABC} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$,

所以 $\tan \angle ABC = \frac{\sin \angle ABC}{\cos \angle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 8 分

因为在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $\tan \angle ABC = \frac{AD}{AB}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{AD}{2}$,

解得 $AD = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, 10 分



所以 $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \sin \angle DAC = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times 1 \times$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ (另解: $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times$

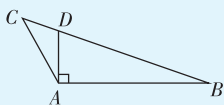
$\frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}$) 12 分

一题多解

(2) 如图, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin(120^\circ - 90^\circ) =$

$\frac{1}{4} AD$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = AD$,

所以 $S_{\triangle ABD} = 4S_{\triangle ADC}$, 10 分



易知 $S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ 12 分

12. 必刷考点 ⊙ 换元法解决解三角形中的范围问题

【解】(1) 因为 $b \sin A = a + c - b \cos A$, 所以由正弦定理可得 $\sin B \sin A = \sin A + \sin B \cos A + \sin A \cos B - \sin B \cos A$, 所以 $\sin B \sin A = \sin A + \sin A \cos B$,

因为 $A \in (0, \pi)$, $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin B - \cos B = 1$,

$\sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}$.

(2) 由 $B = \frac{\pi}{2}$ 知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 满足 $a^2 + c^2 = b^2 = 16$,

所以直角三角形内切圆半径 $r = \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+c-4}{2}$, 因为 $(a +$

$c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 16 + 2ac \leq 16 + \frac{(a+c)^2}{2}$, 所以 $16 \geq \frac{(a+c)^2}{2} \Rightarrow$

$a+c \leq 4\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=c=2\sqrt{2}$ 时等号成立), 所以 $r = \frac{a+c-4}{2} \leq$

$\frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2}-2$, 故 $\triangle ABC$ 的内切圆半径的最大值为 $2\sqrt{2}-2$.

(3) 因为 $B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin B = 1$, 由正弦定理得 $a = b \sin A$, $c =$

$b \sin C = b \cos A$,

所以 $\frac{ac-ab-bc}{b^2} = \frac{(b \sin A) \cdot (b \cos A) - (b \sin A)b - (b \cos A)b}{b^2} =$

$\sin A \cos A - \sin A - \cos A$ (提示: 该式不好确定范围, 可用换元法求解范围).

令 $t = \sin A + \cos A$, 则 $\sin A \cos A = \frac{t^2-1}{2}$, 因为 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所

以 $t = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \in (1, \sqrt{2}]$,

则 $\frac{ac-ab-bc}{b^2} = \frac{t^2-1}{2} - t = \frac{1}{2}[(t-1)^2 - 2]$,



因为函数 $y = \frac{1}{2}[(t-1)^2 - 2]$ 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上单调递增,

所以 $\frac{ac-ab-bc}{b^2} \in \left(-1, \frac{1-2\sqrt{2}}{2}\right]$.